Περσινό Θέμα 13-12-16

Άσκηση 1)

Να υπολογίσετε μια βάση του k-διανυσματικού χώρου $k[x,y]/I$, όπου I είναι το ιδεώδες $I=<\underbrace{x^3-2x}_{g_1}, x^2+y^2-2>$.

$\underbrace{y^2+x^2-2}_{g_2}$

Λύση

Από Θεωρία ξέρουμε ότι:

$B=\{M+I \mid M$ μονώνυμο και $M\notin Lt(I)\}$ βάση του $k[x,y]/I$ ως προς τη διάταξη $<$.

Διαλέγω εγώ ποια διάταξη θα πάρω.

Διαλέγω lex $y>x$, γιατί δεν θα κάνω πράξεις, αφού θα χρησιμοποιήσω τον ΜΚΔ

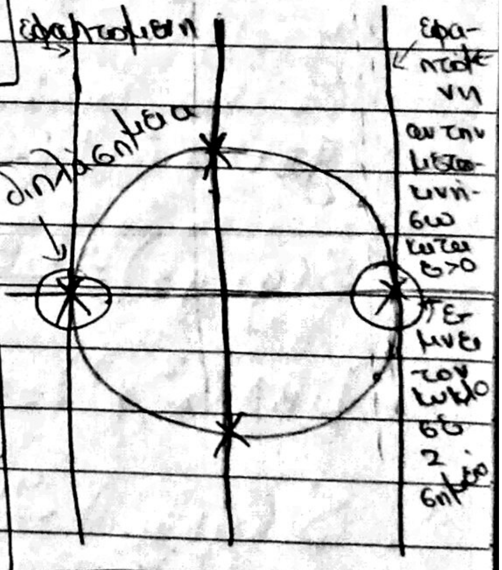
$S(x^3-2x, y^2+x^2-2)$, επειδή ο ΜΚΔ$(x^3, y^2)=1$ προκύπτει ότι $S(x^3-2x, y^2+x^2-2) \xrightarrow{g_1,g_2}_+ 0$

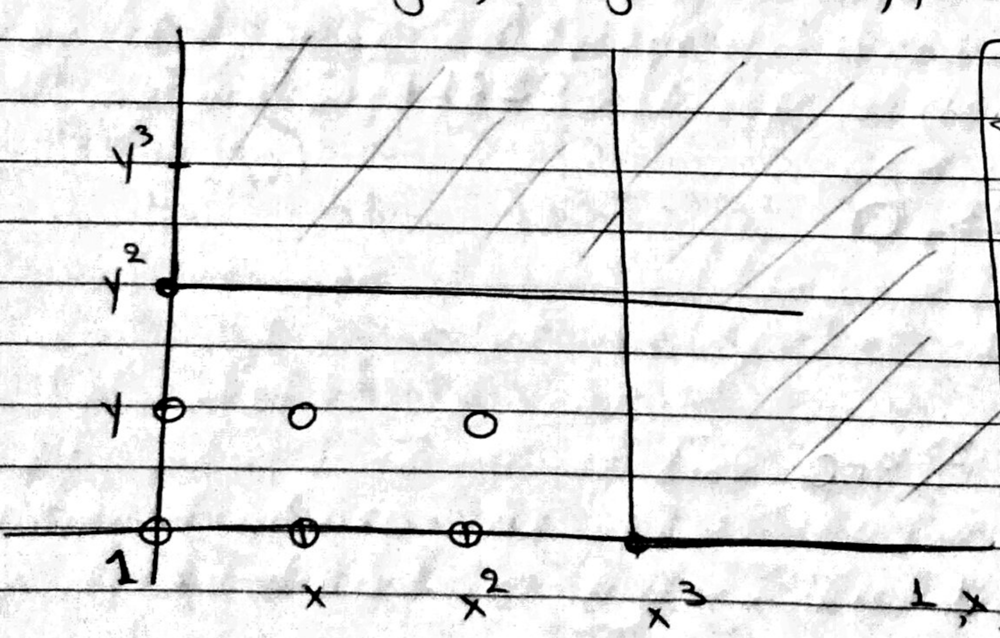
Άρα, g_1, g_2 βάση Grobner.

$Lt(I)=<lm(g_1), lm(g_2)> = <x^3, y^2>$

$V(x^3-2x, x^2+y^2-2) = V(x^3-2x)\cap V(x^2+y^2-2)$

$x^3-2x=0 \to x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$





$1, x, x^2, y, yx, yx^2$

Τα στοιχεία του B θα είναι: $x^a y^b + I$, με $a<3$, $b<2$

$\mathcal{B} = \{1+I, x+I, x^2+I, y+I, yx+I, yx^2+I\}$

Άρα, $\dim(K[x,y]/I) = 6$

$\square$

Άσκηση 2) (Σεπτέμβρης 2016)

Να υπολογίσετε μια βάση του K-διανυσματικού χώρου $K[x,y,z]/I$, όπου I είναι το ιδεώδες $I = \langle x^2+y^2+z^2-7, y^3-z^2, z^2-1\rangle$

Λύση

Την διάταξη, την ορίζουμε εμείς. Θα χρησιμοποιήσουμε εκείνη που μας δίνει τα πλεονεκτήματα των λιγότερων πράξεων.

lex $x>y>z$

$g_1 = x^2+y^2+z^2-7$

$g_2 = y^3-z^2$

$g_3 = z^2-1$

χρησιμοποιώ το κόλπο του μκΔ

SOSAKI

- $S(g_1,g_2) \xrightarrow{g_1,g_2}_+ 0$

$\mu\kappa\Delta(x^2,y^3) = 1$

- $S(g_1,g_3) \xrightarrow{g_1,g_3}_+ 0$

$\mu\kappa\Delta(x^2,z^2) = 1$

- $S(g_2,g_3) \xrightarrow{g_2,g_3}_+ 0$

$\mu\kappa\Delta(y^3,z^2) = 1$

Άρα, g_1, g_2, g_3 βάση Grobner του I

$$Lt(I) = \langle lm(g_1), lm(g_2), lm(g_3) \rangle = \langle x^2, y^3, z^2 \rangle$$

$$\dim k[x,y,z]/I = 12$$

Τα μονώνυμα που ψάχνω είναι της μορφής $x^a y^b z^c$ με $a<2$, $b<3$, $c<2$

Άρα $\mathcal{B} = \{1+I,\ x+I,\ y+I,\ y^2+I,\ yx+I,\ y^2x+I,\ z+I,$
$xz+I,\ yz+I,\ yxz+I,\ yz+I,\ y^2z+I\}$

$$\boxed{\mathcal{B} = \{M+I \mid M \notin Lt(I),\ M \text{ μονώνυμο}\}}$$

!

$\square$

Άσκηση

Επίλυση άσκησης 2) με $I = \langle \underbrace{x^2+y^2+z^2-7}_{g_1}, \underbrace{z^2-1}_{g_2} \rangle$.

— * —

lex $x>y>z$

$$S(g_1, g_2) \xrightarrow{g_1, g_2} 0$$
αφού $\text{ΜΚΔ}(x^2, z^2) = 1$

g_1, g_2 είναι βάση Grobner του $I = \langle g_1, g_2 \rangle$
$Lt(I) = \langle lm(g_1), lm(g_2) \rangle = \langle x^2, z^2 \rangle$

Τα μονώνυμα που ψάχνω είναι της μορφής $x^a y^b z^c$ με $a<2$, $c<2$, b παίρνει οποιαδήποτε τιμή.

$a=0 \quad c=0$
$a=1 \quad b=1$

Βάση του $k[x,y]/I$

[illegible]

Βάση του $k[x,y]/I$

$\{1+I,\ y+I,\ y^2+I,\ y^3+I, \dots, y^n+I, \dots$
$z+I,\ yz+I,\ y^2z+I,\ y^3z+I, \dots, y^nz+I, \dots$
$x+I,\ yx+I,\ y^2x+I,\ y^3x+I, \dots, y^nx+I, \dots$
$xz+I,\ xyz+I,\ xy^2z+I,\ xy^3z+I, \dots, xy^nz+I, \dots \}$

Η διάσταση είναι άπειρη ◻

Απαλοιφή

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + \dots + a_{\mu n}x_n = b_n$

Στην άλγεβρα, χρησιμοποιώντας τον πίνακα, κάναμε γραμμοπράξεις έτσι ώστε να φέρουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Η συγκεκριμένη διαδικασία βασίζονταν στις βάσεις Grobner χρησιμοποιώντας την διάταξη $x_1 > x_2 > \dots > x_n$.

Προσοχή

$k[x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_m]$
Έστω $<_x$ μια μονωνυμική διάταξη του δακτυλίου $k[x_1, \dots x_n]$
Έστω $<_y$ μια μονωνυμική διάταξη του δακτυλίου $k[y_1, \dots y_m]$

Ορισμός: Έστω X_1, X_2 μονώνυμα στις x-μεταβλητές και Y_1, Y_2 μονώνυμα στις y-μεταβλητές, ορίζουμε ότι

$X_1Y_1 < X_2Y_2 \iff X_1 <_x X_2$ ή ($X_1 = X_2$ και $Y_1 <_y Y_2$)

Αυτή ονομάζεται διάταξη απαλοιφής με τις x-μεταβλητές μεγαλύτερες από τις y-μεταβλητές

Η διάταξη απαλοιφής είναι μονωνυμική διάταξη.

1) Έστω $X_1Y_1 < X_1Y_1$, $X_1 = X_1$ άρα $Y_1 <_y Y_1$ Άτοπο, αφού y μονωνυμική διάταξη.

2) Έστω $X_1Y_1 < X_2Y_2$ και $X_2Y_2 < X_3Y_3$

$X_1 <_x X_2$ ή ($X_1 = X_2$ και $Y_1 <_y Y_2$) $X_2 <_x X_3$ ή ($X_2 = X_3$ και $Y_2 <_y Y_3$)

$X_1 \le X_2 \le X_3 \Rightarrow X_1 \le X_3 \Rightarrow X_1 <_x X_3$ ή ($X_1 = X_3 \Rightarrow X_1 = X_2 = X_3$ και $Y_1 <_y Y_2 <_y Y_3 \Rightarrow Y_1 <_y Y_3$), άρα $x_1y_1 < x_3y_3$.

3) $\underbrace{X_1}Y_1, \underbrace{X_2}Y_2$ μονώνυμα του $K[x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_m]$

$X_1 <_x X_2 \Rightarrow X_1Y_1 < X_2Y_2$

$X_1 >_x X_2 \Rightarrow X_1Y_1 > X_2Y_2$

$X_1 = X_2 \Rightarrow$ i) $Y_1 <_y Y_2 \rightarrow X_1Y_1 < X_2Y_2$

ii) $Y_1 = Y_2 \Rightarrow X_1Y_1 = X_2Y_2$

iii) $Y_1 > Y_2 \Rightarrow X_1Y_1 > X_2Y_2$

άρα είναι ολική

4) Έστω $XY \neq 1 \Rightarrow X \neq 1$ ή ($X = 1$ και $Y \neq 1$)

αν $X \neq 1$ η $<_x$ μονωνυμική διάταξη $1 <_x X \Rightarrow 1 < XY$

αν $X = 1$ και $Y \neq 1$ $<_y$ μονωνυμική διάταξη $1 <_y Y \Rightarrow 1 < XY$

Άρα, $1 < XY$

5) Έστω $X_1Y_1 < X_2Y_2$ και XY μονώνυμο του $K[x_1, \dots y_m]$

$X_1 <_x X_2$ ή $X_1 = X_2$ και $Y_1 <_y Y_2$

$XX_1 <_x XX_2$

X μονωνυμική διάταξη ($XX_1 = XX_2$ και $YY_1 <_y YY_2 \Longrightarrow$

$\Rightarrow XX_1YY_1 < XX_2YY_2$).

Άρα, είναι μονωνυμική διάταξη.

□

$I \subseteq K[x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_m]$

$\parallel$

$< f_1, f_2, \dots f_s > = < f_1(x_1, x_n, y_1, \dots y_m), f_2(x_1, \dots y_m), \dots f_s(x_1, x_n, y_1, \dots y_m) >$

$I \cap K[y_1, \dots y_m]$ $(= < g_{i_1}, \dots g_{i_s} >)$

μόνο από μεταβλητή των Y

Θεώρημα: Έστω I ένα μη μηδενικό ιδεώδες του $K[x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m]$ και $<$ μια διάταξη απαλοιφής με τις x-μεταβλητές μεγαλύτερες από τις y-μεταβλητές. Αν $\{g_1, g_2, \dots g_t\}$ είναι βάση Grobner του I τότε: το $G \cap K[y_1, \dots y_m]$ είναι βάση Grobner του ιδεώδους $I \cap K[y_1, y_m]$

Απόδειξη:

$G \cap K[y_1, \dots y_m] \subset I \cap K[y_1, \dots y_m]$, αφού $G \subset I$

Έστω $f \neq 0$ και $f \in I \cap K[y_1, \dots y_m] \Rightarrow f \in I$

$f \in K[y_1, \dots y_m]$

Αφού $f \in I$ και G βάση Gorbner του I, $\exists\, i \in \{1, \dots t\}$ τω $lm(g_i) \mid lm(f) \in K[y_1, \dots y_m]$

Άρα στο αρχικό μονώνυμο του g_i εμφανίζονται μόνο με y-μεταβλητές, η διάταξη μου είναι διάταξη απαλοιφής με τις x-μεταβλητές μεγαλύτερες από τις y-μεταβλητές, άρα όλοι οι υπόλοιποι όροι του g_i έχουν μόνο y-μεταβλητές

$g_i \in k[y_1, \ldots y_m]$ δηλαδή $g_i \in G \cap k[y_1, \ldots y_m]$.
Άρα το $G \cap k[y_1, \ldots y_m]$ είναι βάση Gorbner του $I \cap k[y_1, \ldots y_m]$.

□

Θεώρημα: Έστω I, J ιδεώδη του $k[x_1, \ldots x_n]$ και ω μια νέα μεταβλητή. Τότε:

$$I \cap J = (\omega I + (1-\omega) J) \cap k[x_1, \ldots x_n]$$

Απόδειξη

$(\omega I + (1-\omega) J)$ ιδεώδες του $k[\omega, x_1, \ldots x_n]$. Μια διάταξη απαλοιφής με την μεταβλητή μεγαλύτερη των x-μεταβλητών.

Έστω $\{g_1, g_2, \ldots g_t\}$ βάση Grobner του $\omega J + (1-\omega) J$ τότε $G \cap k[x_1, \ldots x_n]$ βάση Grobner του $(\omega I + (1-\omega) J) \cap k[x_1, \ldots x_n]$

$\subseteq I \cap J$

Έστω $f \in I \cap J \subset k[x_1, \ldots x_n] \Rightarrow f \in k[x_1, \ldots x_n]$

$$f = \underbrace{\omega (f)}_{\in I} + \underbrace{(1-\omega)(f)}_{\in J}$$

Άρα $I \cap J \subset (\omega I + (1-\omega) J) \cap k[x_1, \ldots x_n]$

Έστω $f \in (\omega I + (1-\omega) J) \cap k[x_1, \ldots x_n]$
$f(x_1, \ldots x_n)$
(αφού $f \in k[x_1, \ldots x_n]$)

$(\omega I + (1-\omega) J) = \langle \omega f_1 + \ldots + \omega f_r + (1-\omega) h_1, \ldots (1-\omega) h_s \rangle$
$I = \langle f_1, \ldots f_r \rangle$
$J = \langle h_1, \ldots h_t \rangle$

$$f(x_1, \ldots x_n) = \omega f_1(x_1, \ldots x_n) F_1(\omega, x_1, \ldots x_n) + \ldots + \omega f_r(x_1, \ldots x_n) F_r(\omega, x_1, \ldots x_n) + (1-\omega) h_1(x_1, \ldots x_n) H_1(\omega, x_1, \ldots x_n) + \ldots (1-\omega) h_t(x_1, \ldots x_n) H_t(\omega, x_1, \ldots x_t)$$

$\omega = 1$ $\quad f(x_1, \ldots x_n) = \underbrace{f_1(x_1, \ldots x_n)}_{\in I} F_1(1, x_1, \ldots x_n) + \ldots + \underbrace{f_r(x_1, \ldots x_n)}_{\in I} F_r(1, x_1, \ldots x_n)$
$\Rightarrow f \in I$

$\omega = 0$ $\quad f(x_1, \ldots x_n) = \underbrace{h_1(x_1, \ldots x_n)}_{\in J} H_1(0, x_1, \ldots x_n) + \ldots + \underbrace{h_t(x_1, \ldots x_n)}_{\in J} H_t(0, x_1, \ldots x_n)$

$\Rightarrow f \in J$.

Άρα $f \in I \cap J$. $\square$

Παράδειγμα

Έστω $I = \langle x^2+y^2-1, xy-1 \rangle$, $J = \langle x^3 - xy^2 \rangle$ δυο ιδεώδη του $\mathbb{Q}[x,y]$. Ποια είναι τα στοιχεία που ανήκουν στην $I \cap J$;

Λύση

$\mathbb{Q}[\omega, x, y]$

$L = \langle \omega(x^2+y^2-1), \omega(xy-1), (1-\omega)(x^3-xy^2) \rangle$

lex $\omega > x > y$

Είναι διάταξη απαλοιφής με ω μεγαλύτερος από τις άλλες δύο.

Βάση Grobner $G = \{\omega - \frac{2}{3}x^3y^3 + \frac{1}{3}x^3y + \frac{2}{3}xy^5 - \frac{1}{3}xy^3,$

$x^3y^4 - x^3y^2 + x^3 - xy^6 + xy^4 - xy^2,$

$x^4 + x^3y^3 - x^3y - x^2y^2 - xy^5 + xy^3 \}$

$I \cap J = L \cap \mathbb{Q}[x,y]$

$I \cap J = \langle x^3y^4 - x^3y^2 + x^3 - xy^6 + xy^4 - xy^2,$
$x^4 + x^3y^3 - x^3y - x^2y^2 - xy^5 + xy^3 \rangle$

$\square$

Θέμα του περασμένου Ιουνίου

Έστω $f = x^6y^6 + 5xy^8 + 3x^{12}y^4 \in \mathbb{Q}[x,y]$. Δείξτε ότι $\nexists$ μονωνυμική διάταξη του $\mathbb{Q}[x,y]$, τέτοιο ώστε $lm(f) = x^6y^6$.

Λύση

Έστω ότι $\exists$ τέτοια διάταξη.

Άρα,

$$\left.\begin{array}{l} x^6y^6 > xy^8 \Rightarrow x^{11}y^6 > x^6y^8 \\ x^6y^6 > x^{12}y^4 \Rightarrow x^6y^8 > x^{12}y^6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^{11}y^6 > x^{12}y^6 \Rightarrow x^{11} >$$

$\Rightarrow 1 > x$ άτοπο αφού υποθέσαμε ότι η διάταξη μας είναι μονωνυμική.

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει μονωνυμική διάταξη. □